RS

Sphinx 7 (1937, December) No. 12

Postage stamp problems

2369

Rectangular polyominoes!

Contribution à l'étude du problème des timbres-poste

Par Jacques DEVISME (Tours).

On trouve dans LUCAS [1] l'énoncé : *De combien de manières peut-on replier sur un seul timbre une bande de timbres-poste ?*

Ce problème a été étudié par M. A. SAINTE-LAGUË [2] dans le cas d'une bande rectiligne. On peut plus généralement étudier le cas d'une bande de timbres-poste où chacun est relié au suivant par un côté en longueur ou en largeur. Nous avons étudié à ce sujet plusieurs problèmes.

1. PROBLÈME : *On dispose dans une feuille rectangulaire de timbres-poste deux d'entre eux; de combien de manières peut-on extraire de cette feuille une bande allant d'un timbre à l'autre ?*

Nous appellerons m, n les dimensions de la feuille, a, b les coordonnées du premier timbre, α, β celles du dernier. Pour étudier le problème nous remplacerons la bande par le chemin joignant les centres des timbres consécutifs.

En supposant $(a-\alpha)(b-\beta)\neq 0$ nous avons trouvé qu'il y avait comme nombre de chemins à trois, quatre, cinq côtés respectivement

$$m+n-1,$$

$$2mn-3(m+n)+5+(a\beta+\alpha b)-(a+\beta)-(an+bm),$$

$$\begin{aligned}1{:}2\,[\,&mn(m+n-14)-3(m^2+n^2)+13(m+n)-24\\&+m^2(\beta-b)+2mn(\alpha+\beta)+n^2(\alpha-a)\\&+m[3(b+\beta)-2\beta^2-2a+2ab-2\alpha\beta]\\&+n[3(a+\alpha)-2\alpha^2-2b+2ab-2\alpha\beta]\\&-2(a+b)(a-1)(b-1)-4(a\beta+\alpha b)+2(\alpha+\beta)(\alpha\beta+2)-4\alpha\beta\,]\end{aligned}$$

Nous avons aussi considéré les cas $a=\alpha$.

La complexité rapidement croissante des formules ne laisse guère d'espoir de trouver une loi générale.

2. Un autre problème que nous nous sommes proposé, c'est de savoir le nombre maximum de côtés des chemins constructibles; m et n étant donnés, nous avons montré que l'on peut construire des chemins à p côtés avec :

si m et n sont pairs :	$m \geqq n$	$p=n(m-1)+1$.
si m et n sont impairs :	$m>n$	$p=m(n-1)+1$.
si m et n sont impairs :	$m=n$	$p=m(m-1)$.
si m est pair et n impair quelconques :		$p=m(n-1)+1$.

Nous pensons, bien que nous ne l'ayons pu démontrer, que ces nombres p sont effectivement des maxima.

(1) E. LUCAS : *L'arithmétique amusante*, Paris, 1895.

(2) A. SAINTE-LAGUË : *Les réseaux (ou graphes)*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. XVIII, 1926. *Avec des nombres et des lignes* (Vuibert, Paris, 1937); dans ce dernier ouvrage, l'auteur signale le problème des bandes multiples.

3. Nous nous sommes ensuite arrêtés au problème suivant.

PROBLÈME : *Combien y a-t-il de formes différentes de bandes de timbres contenant n timbres ?*

Ce problème a nécessité l'examen séparé des cas du timbre carré et de celui des timbres rectangulaires. Pour dénombrer rapidement les formes irréductibles, nous avons groupé les chemins en séries. Donnons quelques résultats dans le cas des timbres rectangulaires; si n est le nombre de timbres, N le nombre de chemins, on a le tableau :

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N=$	1	2	5	8	18	44	115	204	785

Inutile de dire que les chances d'erreurs sont nombreuses dans ce genre de travail et que nous ne pouvons affirmer que l'ordre de grandeur et tous les chiffres des unités. Il serait superflu d'ajouter que nous n'avons pas la loi générale.

4. La dernière partie de notre travail a porté sur le problème de LUCAS. Nous numéroterons notre bande en utilisant une suite à deux indices correspondant aux coordonnées des timbres consécutifs.

Nous avons trouvé que même pour des valeurs petites de n, le pliage n'est pas suffisant pour réaliser *l'empilement* sur un seul timbre. On est quelquefois amené à introduire un ou plusieurs timbres entre deux autres qui se comportent par suite d'un pliage préliminaire comme s'ils étaient accolés par deux côtés consécutifs ou opposés, ou encore par trois côtés.

Nous ne donnerons que l'exemple de la bande $a_1^1a_1^2a_1^3a_2^3$ dans sa position empilée $a_1^2a_2^3a_1^1a_1^3$. Pour y parvenir, il faut, après avoir obtenu la position $a_1^2a_2^3a_1^3$ des trois derniers timbres, introduire a_1^1 entre a_2^3 et a_1^3 qui se comportent alors comme s'ils étaient collés par deux côtés consécutifs.

Le mémoire relatif à cette note très résumée paraîtra ultérieurement.

(Résumé d'une communication au Deuxième Congrès de Récréation Mathématique, Paris, 1937.)

Par suite de l'abondance de matière, nous remettons au prochain numéro les problèmes à résoudre et solutions.

La page Cryptarithmique

Adresser à M. Pigeolet, 312, avenue Citschotel, à Borgerhout-Anvers, les énoncés et questions proposées, accompagnés d'une solution complète ou ébauchée; envoyer à la même adresse, les solutions des problèmes parus. Les envois seront également reçus, aux bureaux de la Revue, à condition d'être rédigés sur feuille séparée, sous le titre « La Page Cryptarithmique ».

Les amis belges de *Sphinx*, le cœur serré, ont vu partir pour l'Algérie leur grand ami M. G. Cottin. Toujours aux premiers rangs dans les combats cryptarithmiques, il ne délaisse pas le champ de bataille; à Alger, comme à Bruxelles, fort de l'amitié sincère de ceux qu'il quitte, il continuera inlassablement l'œuvre de foi et de soutien. Aussi c'est avec joie que *Sphinx* annonce des concours originaux pour tous grâce à la libéralité de deux cents francs offerts par M. Cottin ...

Sphinx 7 (1937, Dec) No. 12

2369